M6 Brüche erweitern, kürzen und vergleichen	1

Erweitern: Multiplizieren von Zähler und Nenner mit der gleichen natürlichen Zahl ≠ 0

$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000}$

Kürzen: Dividieren von Zähler und Nenner durch die gleiche natürliche Zahl ≠ 0

$\frac{375}{600} = \frac{375 : 75}{600 : 75} = \frac{5}{8}$ bzw. $\frac{375}{600} = \frac{5 \cdot 75}{8 \cdot 75} = \frac{5 \cdot 75 : 75}{8 \cdot 75 : 75} = \frac{5}{8}$

Vergleichen:

- auf den **gleichen Nenner** bringen: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} < \frac{9}{12} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4}$

  Der Bruch mit dem **größeren Zähler** ist der **größere**.

- auf den **gleichen Zähler** bringen: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9} < \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

  Der Bruch mit dem **größeren Nenner** ist der **kleinere**.

- mit einer **dritten Zahl** vergleichen $\frac{2}{5} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$

M6 Brüche addieren und subtrahieren	2

Nur gleichnamige Brüche (gleicher Nenner) **können addiert / subtrahiert werden.**

gleichnamig machen: Der **Hauptnenner** ist das **kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)** aller beteiligten Nenner.

Beispiele: $\frac{5}{18} + \frac{5}{24} = ?$ Primfaktorzerlegung der Nenner:

$$\left.\begin{aligned} 18 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 24 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{aligned}\right\}$$

die höchsten vorkommenden Potenzen der beteiligten Primfaktoren bilden zusammen den **Hauptnenner:** HN = $2^3 \cdot 3^2 = 72$

$\frac{5}{18} + \frac{5}{24} = \frac{5 \cdot 4}{18 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{20}{72} + \frac{15}{72} = \frac{20+15}{72} = \frac{35}{72}$

$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = ?$ Primfaktorzerlegung der Nenner:

$$\left.\begin{aligned} 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{aligned}\right\} \text{HN} = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{21}{24} - \frac{10}{24} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$

gemischte Zahlen: Man addiert / subtrahiert die **Ganzen und die Brüche getrennt** voneinander; wenn nötig, wandelt man vorher **ein Ganzes des Minuenden in einen Bruch um.**

M6 Brüche erweitern, kürzen und vergleichen	1

Beispiele:

- Erweitere $\frac{43}{52}$ auf den Nenner 468!

  468 : 52 = 9, man muss also mit 9 erweitern: $\frac{43}{52} = \frac{43 \cdot 9}{52 \cdot 9} = \frac{387}{468}$

- Kürze $\frac{68}{391}$ so weit wie möglich / vollständig!

  Primfaktorzerlegung: $68 = 2 \cdot 34 = 2 \cdot 2 \cdot 17$; $391 = 23 \cdot 17$;

  $$\frac{68}{391} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 17}{23 \cdot 17} = \frac{4}{23}$$

- Ordne der Größe nach und beginne mit dem kleinsten Bruch: $\frac{6}{17}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{4}{5}$

  $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} < \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$ $\quad$ $\frac{6}{17} = \frac{12}{34} < \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\Rightarrow \frac{4}{5} < \frac{6}{17} < \frac{1}{2}$

M6 Brüche addieren und subtrahieren	2

Beispiele:

- Berechne: $\frac{5}{48} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 3}{48 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 8}{18 \cdot 8} = \frac{15}{146} + \frac{56}{146} = \frac{15 + 56}{146} = \frac{71}{146}$

- Berechne: $\frac{9}{28} - \frac{11}{12} = \frac{9 \cdot 3}{28 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{27}{84} - \frac{77}{84} = \frac{27 - 77}{84} = -\frac{50}{84} = -\frac{25}{42}$

- Berechne: $3\frac{3}{8} + 8\frac{7}{18} = (3 + 8) + \left(\frac{3 \cdot 9}{8 \cdot 9} + \frac{7 \cdot 4}{18 \cdot 4}\right) = 11 + \frac{27 + 28}{72} = 11\frac{55}{72}$

- Berechne: $2\frac{7}{12} - 5\frac{3}{8} = (2 - 5) + \left(\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3}\right) = -3 + \frac{14 - 9}{24} = \underset{\uparrow}{-3} + \frac{5}{24} = -2\frac{19}{24}$

  (ein Ganzes umwandeln)

M6 Brüche multiplizieren und dividieren | 3

Zum Multiplizieren / Dividieren muss man Brüche **nicht gleichnamig machen!**

Multiplizieren: $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$

(überall hier gilt $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; $b, c, d \neq 0$)

Dividieren: **Multiplizieren mit dem Kehrbruch**

$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$

Bruch mal Zahl: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

Bruch geteilt durch Zahl: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

Zahl mal Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

Zahl geteilt durch Bruch: $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$

Doppelbrüche: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c$ $\quad$ $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a : \frac{b}{c}$ $\quad$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

M6 Brüche ↔ Dezimalbrüche | 4

Bruch in Dezimalbruch umwandeln:

Enthält der Nenner eines vollständig gekürzten Bruches nur die **Primfaktoren 2 und 5**, so lässt er sich durch Division in einen **endlichen Dezimalbruch** umwandeln:

$\frac{15}{4} =$ 1 5 : 4 = 3 , 7 5
1 2
3 0 Komma setzen, nachdem die Einer heruntergeholt wurden
2 8
2 0
2 0
\- -

Enthält der Nenner andere Primfaktoren, so erhält man durch Division einen **unendlichen (periodischen) Dezimalbruch.**

$\frac{15}{22} =$ 1 5 : 2 2 = 0 , 6 $\overline{8\ 1}$
0
1 5 0
1 3 2
1 8 0 gleicher Rest ⇒ Periode 81
1 7 6
4 0
2 2
1 8 0
1 7 6
…

Dezimalbruch in Bruch umwandeln:

Stufenzahl als Nenner (Nullenzahl = Kommastellenzahl)

$0{,}0235 = \frac{235}{10000} = \frac{47}{2000}$ (vollständig kürzen!) $\quad$ $0{,}\overline{0257} = \frac{257}{9999}$ $\quad$ $0{,}00\overline{257} = \frac{257}{99900}$

M6 Brüche multiplizieren und dividieren	3

Beispiele:

- Berechne: $-\frac{8}{14} \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{-8}{14} \cdot \frac{7}{4} = \frac{-8 \cdot 7}{14 \cdot 4} = \frac{-8}{2 \cdot 4} = -1$
- Berechne: $-1\frac{3}{4} : 2\frac{5}{8} = \frac{-7}{4} : \frac{21}{8} = \frac{-7}{4} \cdot \frac{8}{21} = \frac{-7 \cdot 8}{4 \cdot 21} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$
- Berechne: $\frac{3}{8} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ $\qquad 2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{2 \cdot 7}{12} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$
- Berechne: $\frac{42}{48} : 7 = \frac{42}{48 \cdot 7} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$ $\qquad 3 : \frac{9}{28} = 3 \cdot \frac{28}{9} = \frac{3 \cdot 28}{9} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$
- Berechne: $\frac{\frac{27}{31}}{9} = \frac{27}{31} : 9 = \frac{27}{31 \cdot 9} = \frac{3}{31}$ $\qquad \frac{15}{\frac{5}{6}} = 15 : \frac{5}{6} = 15 \cdot \frac{6}{5} = \frac{15 \cdot 6}{5} = 18$
- Berechne: $\frac{\frac{17}{32}}{\frac{51}{64}} = \frac{17}{32} : \frac{51}{64} = \frac{17 \cdot 64}{32 \cdot 51} = \frac{2}{3}$

M6 Brüche ↔ Dezimalbrüche	4

Beispiele:

- Wandle in einen Dezimalbruch um: $-\frac{3}{5}$; $1\frac{3}{4}$; $-\frac{117}{50}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{16}{23}$; $\frac{340}{33}$

$-\frac{3}{5} = -\frac{60}{100} = -0{,}60$; $1\frac{3}{4} = 1{,}75$; $-\frac{117}{50} = -\frac{234}{100} = -2{,}34$; $\frac{2}{9} = 0{,}\overline{2}$; $\frac{16}{23} = 16 : 23 =$

$= 0{,}\overline{6956521739130434782608}$; $\frac{34}{330} = \frac{34 \cdot 3}{33 \cdot 3} : 10 = \frac{102}{99} : 10 = 1\frac{3}{99} : 10 = 1{,}\overline{03} : 10 = 0{,}1\overline{03}$

- Wandle in einen Bruch / eine gemischte Zahl um: $2{,}435$; $0{,}08$; $1{,}00\overline{37}$; $0{,}0802$

$2{,}435 = 2\frac{435}{1000} = 2\frac{87}{200}$; $0{,}08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$; $1{,}00037 = 1\frac{37}{99000}$; $0{,}0802 = \frac{802}{10000} = \frac{401}{5000}$

- Wandle in einen Dezimalbruch um und runde auf drei Nachkommastellen: $-\frac{16}{23}$; $\frac{7}{16}$; $-\frac{261}{15}$; $\frac{35}{26}$

$-\frac{16}{23} = -0{,}6959\ldots \approx -0{,}696$; $\frac{7}{16} = 0{,}4375 \approx 0{,}438$; $-\frac{261}{29} = -9{,}000$; $\frac{35}{26} = 1{,}3461\ldots \approx 1{,}346$

M6 Dezimalbrüche – Grundrechenarten | 5

Addieren / Subtrahieren: **Kommata unter-einander** schreiben:

$$\begin{array}{r} 1{,}063 \\ +\;0{,}1497 \\ \hline 1{,}2127 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1'{,}\,0'6'4'3 \\ -\;0\;{,}\;1\;6\;6\;9 \\ \hline 0\;{,}\;8\;9\;7\;4 \end{array}$$

Multiplizieren: Das Ergebnis besitzt **so viele Kommastellen wie beide Faktoren zusammen:**

$1{,}57 \cdot 2{,}69 \;=\; 4{,}2233 \qquad 0{,}5 \cdot 0{,}4 \;=\; 0{,}20 \;\;[=\; 0{,}2]$

$$\begin{array}{r} 157 \cdot 269 \\ \hline 31400 \\ 9420 \\ 1413 \\ \hline 42233 \end{array}$$

Dividieren: Man **verschiebt das Komma** bei beiden Zahlen **um gleich viele Stellen** so weit nach rechts, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist.

$0{,}364 : 0{,}08 \;=\; 3{,}64 : 0{,}8 \;=\; 36{,}4 : 8 = 4{,}55$

$$\begin{array}{l} 36{,}4 : 8 = 4{,}55 \\ \underline{32} \\ \;\;4\;4 \\ \;\;\underline{4\;0} \\ \;\;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\;\underline{40} \\ \;\;\;\;\;\,\text{- -} \end{array}$$

Beim **Überschreiten des Kommas im Dividenden** setzt man auch **im Ergebnis ein Komma.**

M6 Zehnerpotenzen | 6

Stufenzahl

⋮

$\mathbf{10^3}$ = 1 000 .... eine Eins mit **3** Nullen
$\mathbf{10^2}$ = 100 .... eine Eins mit **2** Nullen
$\mathbf{10^1}$ = 10 .... eine Eins mit **1** Null
$\mathbf{10^0}$ = 1
$\mathbf{10^{-1}}$ = 0,1 .... eine Eins an der **1.** Nachkommastelle
$\mathbf{10^{-2}}$ = 0,01 .... eine Eins an der **2.** Nachkommastelle
$\mathbf{10^{-3}}$ = 0,001 .... eine Eins an der **3.** Nachkommastelle

⋮

Multipliziert man einen Dezimalbruch mit 10^1 , 10^2, 10^3, …
so rückt das Komma um **1**; **2**; **3**; … Stellen **nach rechts**

Multipliziert man einen Dezimalbruch mit 10^{-1} , 10^{-2}, 10^{-3}, …
bzw. dividiert man einen Dezimalbruch durch 10^1 , 10^2, 10^3, …
so rückt das Komma um **1**; **2**; **3**; … Stellen **nach links**

M6 Dezimalbrüche – Grundrechenarten | 5

Beispiele:

- Berechne: 1,66 + 0,4 ; 1,73 + 0,37 ; 61,12 − 4,2 ; 25 − 2,83

1,66	1,73	61,12	25,00
+ 0,40	+ 0,37	− 4,20	− 2,83
2,06	2,10	56,92	22,17

- Berechne: 82,5 · 0,29 ; 0,0045 · 8,8 ; 3,004 · 2,05 ; 0,5 · 2,83

82,5 · 0,29	0,0045 · 8,8	3,004 · 2,05	2,83 · 0,5
16 500	3600	6 00800	1,415
7 425	360	15020	
23,925	0,03960	6,15820	

- Berechne: 38,43 : 0,1 ; 0,054 : 0,45 ; 6,5104 : 2,6

38,43 : 0,1 = 384,3 : 1 = $\underline{\underline{384{,}3}}$ 38,43 : 0,1 = 3843 : 10 = $\underline{\underline{384{,}3}}$

0,054 : 0,45 = 5,4 : 45 = $\underline{\underline{0{,}12}}$ 0,054 : 0,45 = 54 : 450 = $\underline{\underline{0{,}12}}$

6,5104 : 2,6 = 65,104 : 26 = $\underline{\underline{2{,}504}}$ 6,5104 : 2,6 = 65104 : 26000 = $\underline{\underline{2{,}504}}$

M6 Zehnerpotenzen | 6

Beispiele:

- Berechne (Kommaverschiebung): 73,29 · 10 ; 0,362 · 100 ; 4,2 : 1000 ; 0,0047 : 100

  73,29 · 10 = $\underline{\underline{732{,}9}}$; 0,362 · 100 = $\underline{\underline{36{,}2}}$; 4,2 : 1000 = $\underline{\underline{0{,}0042}}$; 0,0047 : 100 = $\underline{\underline{0{,}000047}}$

- Schreibe dezimal: $5 \cdot 10^{-2}$; 5^{-2} ; 10^{-5} ; $5{,}2 \cdot 10^{5}$; $765 \cdot 10^{-7}$; $0{,}0004829 \cdot 10^{5}$

  $5 \cdot 10^{-2} = \underline{\underline{0{,}05}}$; $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \underline{\underline{0{,}04}}$; $10^{-5} = \underline{\underline{0{,}00001}}$; $5{,}2 \cdot 10^{5} = \underline{\underline{520000}}$;

  $765 \cdot 10^{-7} = \underline{\underline{0{,}0000765}}$; $0{,}0004829 \cdot 10^{5} = \underline{\underline{48{,}29}}$

- Schreibe mit Hilfe einer Zehnerpotenz so um, dass die Zahlen nur eine Vorkommastelle besitzen:

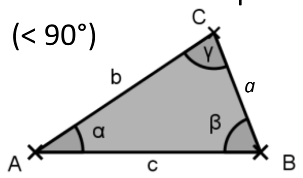
  8000000 ; 5379000000 ; 75 ; 0,0000697 ; 6,3 ; 0,24 ; 511000000 km²

  8000000 = $8 \cdot 10^{6}$; 5379000000 = $5{,}379 \cdot 10^{9}$; 75 = $7{,}5 \cdot 10^{1}$; 0,0000697 = $6{,}97 \cdot 10^{-5}$;

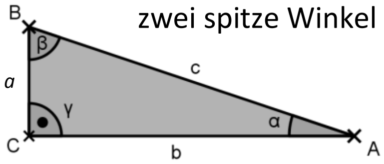
  6,3 = $6{,}3 \cdot 10^{0}$; 0,24 = $2{,}4 \cdot 10^{-1}$; 511000000 km² = $5{,}11 \cdot 10^{8}$ km²

M6 Dreiecke | 7

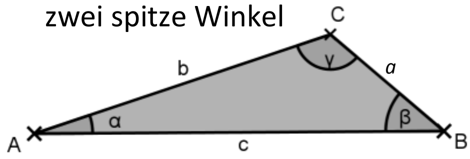
spitzwinkliges Dreieck:
Jeder Winkel ist spitz
(< 90°)



rechtwinkliges Dreieck:
Ein rechter Winkel,
zwei spitze Winkel

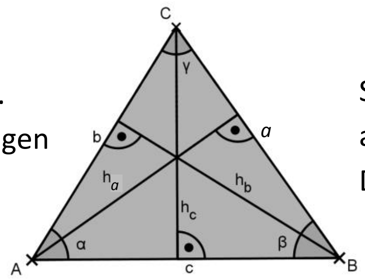


stumpfwinkliges Dreieck
Ein stumpfer Winkel (> 90°),
zwei spitze Winkel

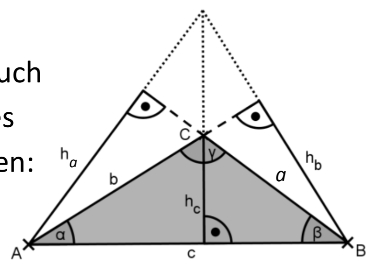


Höhen im Dreieck:

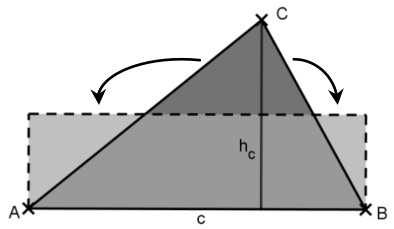
Jedes Dreieck besitzt **drei Höhen**.
Die Höhen bzw. ihre Verlängerungen schneiden sich in einem Punkt.



Sie können auch außerhalb des Dreiecks liegen:

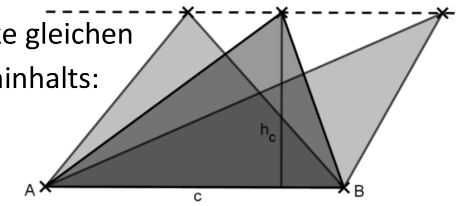


Flächeninhalt eines Dreiecks:



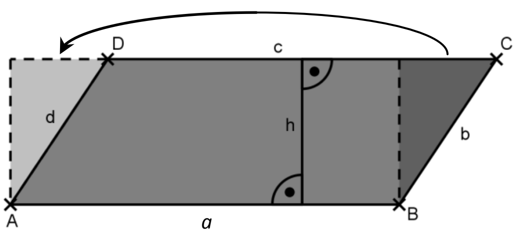
$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a}$$
$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b}$$
$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c}$$

Dreiecke gleichen Flächeninhalts:

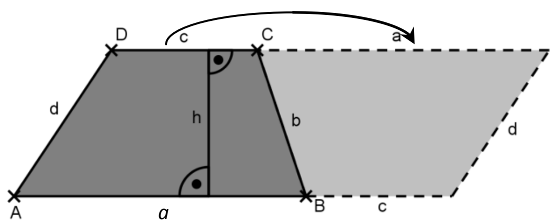


M6 Flächeninhalte | 8

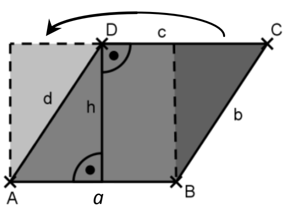
Parallelogramm: $\boxed{A = a \cdot h}$

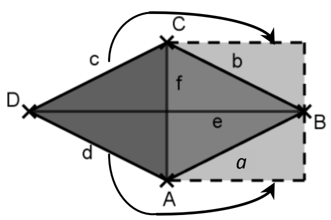


Trapez: $\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h}$

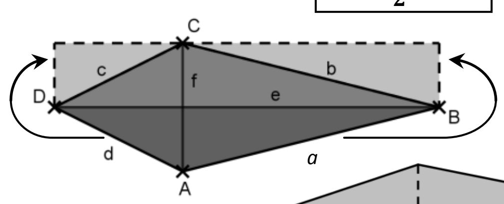


Raute: $\boxed{A = a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$





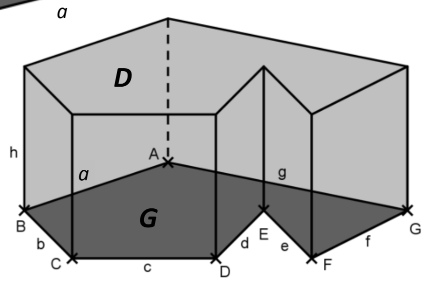
Drachenviereck: $\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f}$



Oberfläche gerader Prismen:

$$\boxed{A = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h}$$

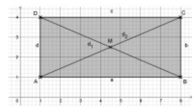
G**:* Grundfläche = Deckfläche ***D
***M**:* Mantelfläche
U**:* Umfang von ***G



M6 Dreiecke | 7

Beispiele:

- Im Rechteck *ABCD* halbiert *M* die beiden Diagonalen d_1 und d_2. Begründe, dass die Dreiecke ΔBCM und ΔABM den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen jedoch auszurechnen. *(nach einer Abituraufgabe von 2019)*



Lösung: Die Streckenlängen $|\overline{AM}|$ und $|\overline{MC}|$ sind gleich groß, da *M* die Diagonale d_2 halbiert. Wählt man diese beiden Strecken als Grundlinie der Dreiecke ΔBCM und ΔABM, so haben die Dreiecke außerdem die gleiche Höhe, nämlich *d(B ; AC)*, den Abstand des Punktes *B* von *AC*, da der Punkt *B* die Spitze beider Dreiecke bildet. Zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAMD aus der Aufgabe oben. (Entnimm fehlende Angaben der obigen Zeichnung.)

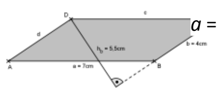
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h_a$ mit $h_a = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3{,}5$ [LE]

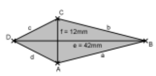
$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3{,}5 = 1{,}5 \cdot 3{,}5 = \underline{\underline{5{,}25}}$ [FE]

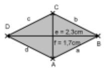
M6 Flächeninhalte | 8

Beispiele:

- Berechne jeweils den Flächeninhalt in cm²:







Drache: $A_D = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 12\text{mm} \cdot 42\text{mm} = 6\text{mm} \cdot 42\text{mm} = 252\text{mm}^2 = \underline{\underline{2{,}52\text{cm}^2}}$

Raute: $A_R = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 2{,}3\text{cm} \cdot 1{,}7\text{cm} = 1{,}15\text{cm} \cdot 1{,}7\text{cm} = \underline{\underline{1{,}955\text{cm}^2}}$

Parallelogramm: $A_P = b \cdot h_b = 4\text{cm} \cdot 5{,}5\text{cm} = \underline{\underline{22\text{cm}^2}}$

- Bestimme für ein Trapez *ABCD* mit $a \parallel c$ die fehlenden Größen: Gegeben sind

$b = 10{,}6\text{cm}$; $c = 14\text{cm}$; $d = 65\text{mm}$; $A = 43{,}96\text{cm}^2$; $U = 32{,}8\text{cm}$

$a = U - (b + c + d) = 32{,}8\text{cm} - (10{,}6 + 14 + 6{,}5)\text{cm} = \underline{\underline{1{,}7\text{cm}}}$

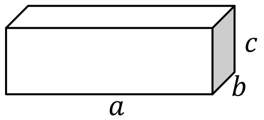
$h = A : [(a + c) : 2] = \frac{2 \cdot A}{a + c} = \frac{2 \cdot 43{,}96\text{cm}^2}{1{,}7\text{cm} + 14\text{cm}} = \frac{87{,}92\text{cm}}{15{,}7} = \underline{\underline{5{,}6\text{cm}}}$

M6 Volumina — 9

Das **Volumen eines Körpers** gibt an, welchen **Rauminhalt** er besitzt.

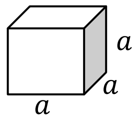
Einheiten: 1 cm³ = 1 000 mm³ 1 dm³ = 1 000cm³ 1 m³ = 1 000dm³
1 cm³ = 1 mℓ 1 dm³ = 1 ℓ 1 hℓ = 100 ℓ
1 km³ = 1 km · 1 km · 1 km = 1 000 m · 1 000 m · 1 000 m = 1 000 000 000 m³

Volumen eines Quaders:



$$\boxed{V_{Quader} = a \cdot b \cdot c}$$

Spezialfall: Würfel

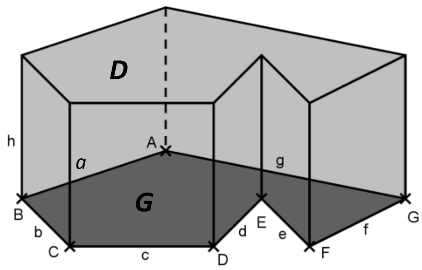


$$\boxed{V_{Würfel} = a \cdot a \cdot a = a^3}$$

Volumen anderer Körper: **Zerlegen** in Quader / Würfel oder **Ergänzen** zu Quadern / Würfeln

Volumen eines geraden Prismas: Grundfläche ***G*** mal Höhe ***h***

$$\boxed{V_{gerades\ Prisma} = G \cdot h}$$



M6 Anteile, Bruchteile, Prozentangaben — 10

Man schreibt den Quotienten ***Z : N*** oft als **Bruch** $\frac{Z}{N}$. Ein Bruch besteht immer aus **Zähler *Z*** und **Nenner *N***.

Der **Anteil** $\frac{Z}{N}$ **eines Ganzen** bedeutet:

Man teilt das Ganze in ***N*** **gleich große Teile** und **nimmt *Z* solcher Teile**.

$$\underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{Anteil}} \text{ von } \underbrace{100\text{kg}}_{\text{Ganzes}} = \left(\frac{1}{4} \text{ von } 100\text{kg}\right) \cdot 3 = \frac{3}{4} \cdot 100\text{kg} = \frac{3 \cdot 100\text{kg}}{4} = \frac{3 \cdot 25\text{kg}}{1} = \underbrace{75\text{kg}}_{\text{Bruchteil}}$$

Prozentangaben:

Auf den **Nenner 100** erweiterte oder gekürzte Anteile gibt man häufig in **Prozent** an:

z.B. $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$

Auf den **Nenner 1000** erweiterte oder gekürzte Anteile gibt man häufig in **Promille** an:

z.B. $0{,}25\% = \frac{0{,}25}{100} = \frac{2{,}5}{1000} = 2{,}5‰$

M6 Volumina	9

Beispiele:

- Eine quaderförmige Waschmittelpackung ist 25cm lang, 12cm breit und 16cm hoch. Sie wird bis zur Höhe von 14cm mit Waschpulver befüllt. Berechne das Volumen V_P des Pulverinhalts und das nicht befüllte Restvolumen V_R der Packung jeweils in ℓ.

  $V_P = (25 \cdot 12 \cdot 14)\text{cm}^3 = 4200\text{cm}^3 = \underline{\underline{4{,}2\ell}}$; $V_R = (25 \cdot 12 \cdot 2)\text{cm}^3 = 600\text{cm}^3 = \underline{\underline{0{,}6\ell}}$

- In eine leere Baugrube mit 80m² Grundfläche sind 16hℓ Wasser gelaufen. Berechne, wie hoch das Wasser in der Baugrube steht, wenn nichts versickert.

  $16\text{h}\ell = 1600\ell = 1600\text{dm}^3$; $h = V : A = 1600\text{dm}^3 : 80\text{m}^2 = 1600\text{dm}^3 : 8000\text{dm}^2 = 0{,}5\text{dm} = \underline{\underline{5\text{cm}}}$

M6 Anteile, Bruchteile, Prozentangaben	10

Beispiele:

- Berechne den Bruchteil: $\frac{7}{12}$ von 60h ; $\frac{7}{12}$ von $60\text{h} = \frac{7}{12} \cdot 60\text{h} = \frac{7 \cdot 60\text{h}}{12} = 35\text{h}$

- Berechne den Anteil, den 6cm von 8cm bilden. $\frac{6\text{cm}}{8\text{cm}} = \frac{3}{4}$

- Gib den Anteil in der in Klammern angegeben Einheit an: 5min (1h) 12cm (1m)

  $\frac{5\text{min}}{1\text{h}} = \frac{5\text{min}}{60\text{min}} = \frac{1}{12}$ $\frac{12\text{cm}}{1\text{m}} = \frac{12\text{cm}}{100\text{cm}} = \frac{3}{25}$

- Gib die Anteile jeweils in Prozent an: $\frac{3}{25}$; $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 12\%$

  $\frac{11}{20}$; $\frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{55}{100} = 55\%$

- Gib die Anteile jeweils in Promille an: $\frac{3}{25}$; $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 40}{25 \cdot 40} = \frac{120}{1000} = 120‰$

  $\frac{1}{200}$; $\frac{1}{200} = \frac{1 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{5}{1000} = 5‰$

M6 Prozentrechnung – Grundgleichung der Prozentrechnung | 11

Prozentsatz *von* dem Grundwert = Prozentwert

Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert

Abkürzung:

$\boxed{\mathbf{PS \cdot GW = PW}}$

30% *von* 7000€ = 2100€

30% · 7000€ = 2100€

(Prozentwert gesucht)

Auflösen durch vergleichen:

15% · *x* = 2100€ (Grundwert gesucht)

x · 2500€ = 3000€ (Prozentsatz gesucht)

Vergleichsgleichung

$2 \cdot x = 6$
$x = 6 : 2$

$x \cdot 3 = 6$
$x = 6 : 3$

$$\mathbf{x = 2100€ : 15\% =}$$
$$\mathbf{= 2100€ : 0{,}15 =}$$
$$\mathbf{= 2100€ : \frac{15}{100} =}$$
$$\mathbf{= 2100€ \cdot \frac{100}{15} = \frac{2100€ \cdot 20}{3} = 700€ \cdot 20 = 14000€}$$

$$\mathbf{x = 3000€ : 2500€ =}$$
$$\mathbf{= \frac{3000€}{2500€} = \frac{30}{25} = \frac{120}{100} = 120\%}$$

M6 Prozentrechnung – (verkürzter) Dreisatz | 12

Dieser **Lösungsweg ist unabhängig** davon, welche der drei Größen (Prozentsatz, Grundwert oder Prozentwert) aus der „Grundgleichung der Prozentrechnung“ gesucht ist!

Wie viel sind
15% von 3500€ ?
(Prozentwert gesucht)

$\boxed{100\%}$ ≙ 3500€

15% ≙ x [€]

Wie viel Prozent entsprechen
1050€ von 3500€ ?
(Prozentsatz gesucht)

100% ≙ $\boxed{3500€}$

x [%] ≙ 1050€

5% Zins sind 175€. Wie
groß ist das Vermögen ?
(Grundwert gesucht)

$\boxed{5\%}$ ≙ 175€

100% ≙ x [€]

Diagonal multiplizieren und durch die $\boxed{\text{übriggebliebene Angabe}}$ teilen (verkürzter Dreisatz):

x [€] $= \frac{15\% \cdot 3500€}{100\%} =$

$= 15 \cdot 35€ =$

$=$ <u>525€</u>

x [%] $= \frac{100\% \cdot 1050€}{3500€} =$

$= \frac{1050\%}{35} =$

$=$ <u>30%</u>

x [€] $= \frac{100\% \cdot 175€}{5\%} =$

$= 100 \cdot 35€ =$

$=$ <u>350€</u>

M6 Prozentrechnung – Grundgleichung der Prozentrechnung	**11**

Beispiele:

- Berechne den Prozentwert: 58% von 1h ;

$$\text{PW} = 58\% \text{ von } 60\text{min} = 58\% \cdot 60\text{min} = \frac{58 \cdot 60\text{min}}{100} = \frac{58 \cdot 3\text{min}}{5} = \frac{174\text{min}}{5} = 34{,}8\text{min}$$

- Berechne den Prozentsatz: 54min von 1h ; PS = PW : GW

$$\text{PS} = \frac{54\text{min}}{1\text{h}} = \frac{54\text{min}}{60\text{min}} = \frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\%$$

- Berechne den Grundwert: 60% sind 12min ; GW = PW : PS

$$\text{GW} = \frac{12\text{min}}{60\%} = \frac{12\text{min}}{\frac{60}{100}} = \frac{12\text{min} \cdot 100}{60} = \frac{100\text{min}}{5} = 20\text{min}$$

M6 Prozentrechnung – (verkürzter) Dreisatz	**12**

Beispiele:

- Berechne den Prozentwert: 58% von 1h ;

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \triangleq & 1\text{h} = 60\text{min} \\ 58\% & \triangleq & x\,[\text{min}] \end{array}$$

$$x = \frac{58 \cdot 60\text{min}}{100} = \frac{58 \cdot 3\text{min}}{5} = \frac{174\text{min}}{5} = 34{,}8\text{min}$$

- Berechne den Prozentsatz: 54min von 1h ;

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \triangleq & 1\text{h} = 60\text{min} \\ x\,[\%] & \triangleq & 54\text{min} \end{array}$$

$$x = \frac{100\% \cdot 54\text{min}}{1\text{h}} = \frac{100\% \cdot 54\text{min}}{60\text{min}} = \frac{100\% \cdot 9}{10} = 90\%$$

- Berechne den Grundwert: 60% sind 12min ;

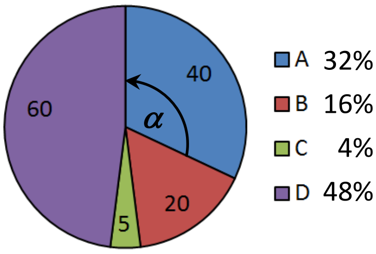
$$\begin{array}{lcl} 100\% & \triangleq & x\,[\text{min}] \\ 60\% & \triangleq & 12\text{min} \end{array}$$

$$x = \frac{100\% \cdot 12\text{min}}{60\%} = \frac{100\text{min}}{5} = 20\text{min}$$

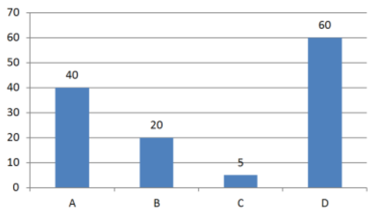
M6 Diagramme und Prozentdarstellungen | 13

Anteile lassen sich gut durch **Diagramme** veranschaulichen:

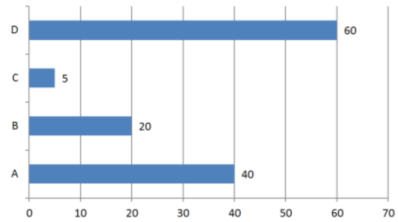
Kreisdiagramm



Säulendiagramm



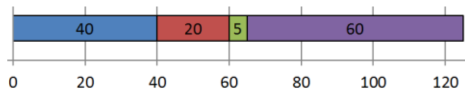
Balkendiagrammm



Beim Kreisdiagramm entspricht die Größe des **Mittelpunktswinkels** α dem jeweiligen Anteil:

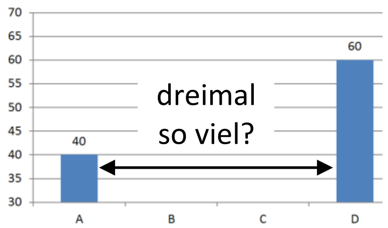
$\alpha = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{125}} \cdot \mathbf{360°} = \frac{32}{100} \cdot 360° = \mathbf{32\%} \cdot \mathbf{360°} = 0{,}32 \cdot 360° = \underline{\underline{115{,}2°}}$

Streifendiagramm

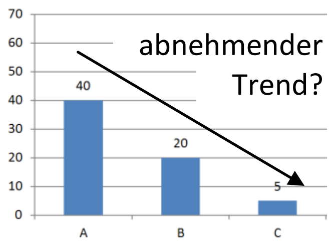


Verfälschung von Diagrammen:

Die Hochwertachse **beginnt nicht bei Null:**



Nur eine **Auswahl der Daten** wird dargestellt (D = 60 fehlt):

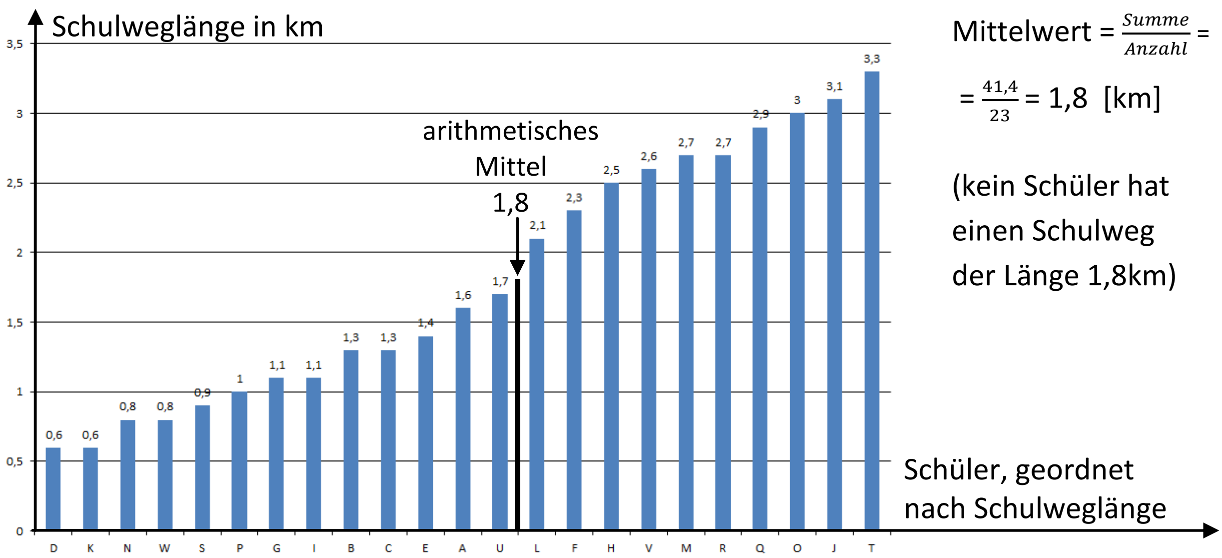


M6 Arithmetisches Mittel | 14

Das **arithmetische Mittel** wird berechnet als $\frac{Summe\ der\ einzelnen\ Werte}{Gesamtanzahl\ an\ Werten}$.

Andere Namen für das arithmetische Mittel sind **Durchschnitt, Mittelwert** oder nur **Mittel.**

Häufig stimmt das arithmetische Mittel **mit keinem der Werte des Datensatzes überein:**



Mittelwert = $\frac{Summe}{Anzahl}$ =

$= \frac{41{,}4}{23} = 1{,}8$ [km]

(kein Schüler hat einen Schulweg der Länge 1,8km)

0,6
0,6
0,8
0,8
0,9
1,0
1,1
1,1
1,3
1,3
1,4
1,6
1,7
2,1
2,3
2,5
2,6
2,7
2,7
2,9
3,0
3,1
+ 3,3

41,4

M6 Diagramme und Prozentdarstellungen | 13

Beispiele:

Bei der Schülersprecherwahl haben die Kandidaten folgende Stimmenzahl erhalten:
Adam: 108; Benita: 120; Christina: 150; David: 222.
Erstelle ein Kreis-, Säulen-, Balken- und Streifendiagramm.

<u>Berechnung der Anteile:</u> 108 + 120 + 150 + 222 = 600 (Gesamtstimmenzahl)

A: $\frac{108}{600} = \frac{18}{100} = 18\%$ B: $\frac{120}{600} = \frac{20}{100} = 20\%$ C: $\frac{150}{600} = \frac{25}{100} = 25\%$ D: $\frac{222}{600} = \frac{37}{100} = 37\%$

<u>Berechnung der Mittelpunktswinkel:</u>

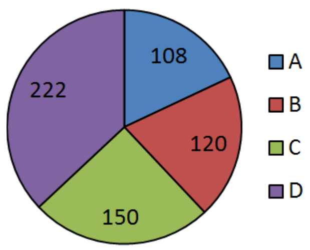
A: $\frac{18}{100} \cdot 360° = 64{,}8°$ B: $\frac{20}{100} \cdot 360° = 72°$

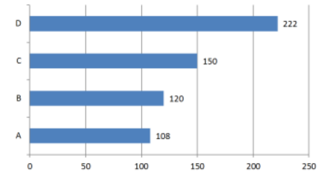
C: $\frac{25}{100} \cdot 360° = 90°$ D: $\frac{37}{100} \cdot 360° = 133°$

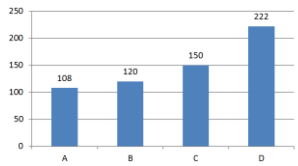
<u>Berechnung der Säulen- / Balken- / Streifenlängen:</u>

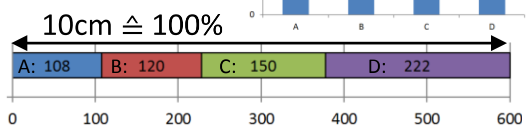
A: $\frac{18}{100} \cdot 10\text{cm} = 1{,}8\text{cm}$ B: $\frac{20}{100} \cdot 10\text{cm} = 2{,}5\text{cm}$

C: $\frac{25}{100} \cdot 10\text{cm} = 2{,}0\text{cm}$ D: $\frac{37}{100} \cdot 10\text{cm} = 3{,}7\text{cm}$









M6 Arithmetisches Mittel | 14

Beispiele:

Bestimme von jedem Datensatz das arithmetische Mittel und gib den Wert / die Werte des Datensatzes an, der / die dem arithmetischen Mittel am nächsten kommt / kommen:

3cm; 2cm; 5cm; 3cm; 3cm; 4cm; 2cm; 4cm

12,4kg; 14,2kg; 14,4kg; 11,6kg; 12,4kg

2,50m; 2,10m; 1,80m; 1,90m; 1,75m; 2,10m; 2,55m

<u>Mittelwerte:</u>

(3cm + 2cm + 5cm + 3cm + 3cm + 4cm + 2cm + 4cm) : 8 = <u>4,5cm</u>; am nächsten: 5cm; 4cm; 4cm

(12,4kg + 14,2kg + 14,4kg + 11,6kg + 12,4kg) : 5 = <u>13,0kg</u>; am nächsten: 12,4kg; 12,4kg

(2,50m + 2,10m + 1,80m + 1,90m + 1,75m + 2,10m + 2,55m) : 7 = <u>2,10m</u>;

am nächsten: 2,10m; 2,10m

(mehrere Daten können gleich weit vom Mittelwert entfernt sein oder diesen sogar erreichen)

M6 Absolute und relative Häufigkeit

Die **absolute Häufigkeit** ist eine Anzahl (z.B. 6 Schüler, die ein Haustier besitzen).

Die zugehörige **relative Häufigkeit** ist der Anteil der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl:

$$\boxed{\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}}$$

Beispiel:

6 von 30 Schülern besitzen ein Haustier

relative Häufigkeit der Haustierbesitzer $= \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$ [jeder fünfte Schüler]

Relative Häufigkeiten werden oft in Prozentschreibweise angegeben.

M6 Relative Häufigkeit

Beispiele:

- Bei der Schülersprecherwahl haben die Kandidaten folgende Stimmenzahl erhalten:
  Adam: 108; Benita: 120; Christina: 150; David: 222.
  Berechne die relativen Häufigkeiten jeweils als Anteile und in Prozent.

  Berechnung der Anteile: 108 + 120 + 150 + 222 = 600 (Gesamtstimmenzahl)

  A: $\frac{108}{600} = \frac{18}{100} = 18\%$ B: $\frac{120}{600} = \frac{20}{100} = 20\%$ C: $\frac{150}{600} = \frac{25}{100} = 25\%$ D: $\frac{222}{600} = \frac{37}{100} = 37\%$

- Von den 800 Schülern einer Schule haben 7% blonde, 32% hellbraune, 43% dunkelbraune, 3% rötliche und 14% schwarze Haare. Berechne die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Haarfarben.

  100% ≙ 800 Schüler;

  blond: $\frac{7}{100} \cdot 800 = 56$ hellbraun: $\frac{32}{100} \cdot 800 = 256$ dunkelbraun: $\frac{43}{100} \cdot 800 = 344$

  rötlich: $\frac{3}{100} \cdot 800 = 24$ schwarz: $\frac{14}{100} \cdot 800 = 112$